研究简讯

正则余剩余格的特征及其应用*

郑慕聪 王国俊

陕西师范大学数学与信息科学学院，西安 710062

摘要 余剩余格理论是研究逻辑代数系统的重要工具，而余剩余格的代数结构本身就具有普遍性和代表性. 文中对余剩余格的定义和性质进行研究，给出了余剩余格的特征定理，并且引入正则余剩余格的概念，进而讨论了正则余剩余格的特征定理，同时证明了正则余剩余格与正则剩余格的一致性. 最后，基于正则余剩余格的特征定理给出了几类逻辑代数系统的等价刻画.

关键词 余伴随对 余剩余格 剩余格 正则余剩余格 多值逻辑

众所周知，多值逻辑系统与相应的代数系统的研究是紧密相关的. 早在1958年，著名逻辑学家Chang为解决Lukasiewicz多值逻辑系统的完备性而引入了MV-代数的理论并成功地证明了Lukasiewicz系统的完备性[1]. 不同的多值逻辑系统对应着不同的逻辑代数系统[1—5]，基于三角模的剩余格理论是研究这些逻辑代数系统的重要工具[2,5]. 有关各类逻辑代数系统的研究已取得了丰硕成果[1—13]，这些研究成果既促进了多值逻辑的发展，又丰富了代数学的内容. 我们曾基于三角余模引入了余伴随对($\oplus$，$\ominus$)进而提出余剩余格理论1)，为研究多值逻辑代数系统提供了又一有力工具，而且余伴随对的性质在形式上与(+，−)，(×，÷)这些伴随算子有着某些一致性，可以看作是它们在格上的自然推广. 本文的目的在于系统的研究余剩余格的代数结构及其特征.

1 预备知识

我们首先给出余伴随对和余剩余格的定义.

定义11) 设P是偏序集，称P上的二元运算$\oplus$与$\ominus$互为余伴随，若以下条件成立：

(1) $\oplus$：$P\times P\to P$是单调递增的；

(2) $\ominus$：$P\times P\to P$是关于第一变量不减的，关于第二变量不增的；

(3) $c\leqslant a\oplus b$当且仅当$c\ominus b\leqslant a$，a，b，$c\in P$.

这时($\oplus$，$\ominus$)叫做P上的余伴随对.

定义21) 有界格(L，$\vee$，$\wedge$，0)叫余剩余格，若

(1) L上有余伴随对($\oplus$，$\ominus$)；

(2) (L，$\oplus$，0)是带单位元0的交换半群，这里0是L的最小元.

这时把L记作(L，$\vee$，$\wedge$，$\oplus$，$\ominus$)或(L，$\oplus$，$\ominus$).

本文把全体余剩余格之类记为CRL，下文总假设L是有界格，0，1分别为L上的最小元和最大元，且$\oplus$，$\ominus$是L上的二元运算.

根据定义1，2我们有以下结论.

命题1 (L，$\oplus$，$\ominus$)$\in CRL$的充要条件是$\forall a$，b，$c\in L$

(C1) $\oplus$是单调递增的；

2004-06-18收稿，2004-08-16收修改稿

* 国家自然科学基金重点项目资助(批准号：10331010)

E-mail：gjwang@snnu.edu.cn

1) 郑慕聪，王国俊. 余剩余格及其应用. 模糊系统与数学(已录用)

(C2) $\ominus$ 关于第一变量不减，即 $a\leqslant b$ 时 $a\ominus c\leqslant b\ominus c$；

(C3) $\ominus$ 关于第二变量不增，即 $b\leqslant c$ 时 $a\ominus c\leqslant a\ominus b$；

(C4) $c\leqslant a\oplus b$ 当且仅当 $c\ominus b\leqslant a$；

(C5) $\oplus$ 是结合的，即 $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$；

(C6) $\oplus$ 是交换的，即 $a\oplus b=b\oplus c$；

(C7) $\oplus$ 是以 0 为左单位元，即 $0\oplus a=a$.

命题 2[1)] 若 $(L,\oplus,\ominus)$ 是余剩余格，则

(C8) $a\ominus 0=a$；

(C9) $(a\oplus b)\ominus b\leqslant a\leqslant(a\ominus b)\oplus b$；

(C10) $a\ominus b=0$ 当且仅当 $a\leqslant b$；

(C11) $c\ominus b\leqslant a$ 当且仅当 $c\ominus a\leqslant b$；

(C12) $(a\ominus b)\ominus c=(a\ominus c)\ominus b$；

(C13) $a\ominus(b\oplus c)=(a\ominus c)\ominus b$；

(C14) $(a\wedge b)\oplus c=(a\oplus c)\wedge(b\oplus c)$；

(C15) $(a\vee b)\ominus c=(a\ominus c)\vee(b\ominus c)$；

(C16) $(a\ominus c)\ominus(b\ominus d)\leqslant(a\ominus b)\oplus(d\ominus c)$.

引理 1 设(C4)成立，则(C7)等价于(C10).

引理 2 设(C4)成立，则下列条件等价

(1) (C5)，(C6)成立；(2) (C12)成立.

2 余剩余格的特征

定理 1 $(L,\oplus,\ominus)\in CRL$ 的充要条件是(C4)，(C10)，(C12)成立.

证明 必要性显然成立.

充分性：由引理 1 与引理 2 知，(C5)，(C6)，(C7)显然成立，只需证(C1)，(C2)，(C3)成立.

若 $a\leqslant b$ 则 $\forall x\in L$，由 $x\leqslant a\oplus c\Leftrightarrow x\ominus c\leqslant a$ 得 $x\ominus c\leqslant b$，即 $x\leqslant b\oplus c$. 所以 $a\oplus c\leqslant b\oplus c$. 这样由(C6)知(C1)成立.

若 $a\leqslant b$ 则 $\forall x\in L$，由 $b\ominus c\leqslant x\Leftrightarrow b\leqslant x\oplus c$ 得 $a\leqslant x\oplus c$，即 $a\ominus c\leqslant x$. 所以 $a\ominus c\leqslant b\ominus c$，故(C2)成立. 同理可得(C3)成立.

定理 2 $(L,\oplus,\ominus)\in CRL$ 的充要条件是(C9)，(C10)，(C12)，(C14)，(C15)成立.

证明 必要性显然成立.

充分性：由定理 1 知，只需证(C4)成立.

若 $c\leqslant a\oplus b$，则由(C15)及(C9)得 $c\ominus b\leqslant(a\oplus b)\ominus b\leqslant a$；若 $c\ominus b\leqslant a$，则由(C14)及(C9)得 $c\leqslant(c\ominus b)\oplus b\leqslant a\oplus b$. 所以(C4)成立.

由定理 2 和引理 1 容易得到下面的

推论 1 $(L,\oplus,\ominus)\in CRL$ 的充要条件是下面的等式成立：

(1) $((a\oplus b)\ominus b)\vee a=a$；

(2) $a\wedge((a\ominus b)\oplus b)=a$；

(3) $(a\wedge b)\oplus c=(a\oplus c)\wedge(b\oplus c)$；

(4) $(a\vee b)\ominus c=(a\ominus c)\vee(b\ominus c)$；

(5) $(a\ominus b)\ominus c=(a\ominus c)\ominus b$；

(6) $0\oplus a=a$.

定理 3 $(L,\oplus,\ominus)\in CRL$ 的充要条件是(C10)，(C12)，(C13)成立.

证明 必要性显然成立，而对于充分性，只需要证明(C4)成立即可. 由(C10)，(C12)，(C13)知

$$c\leqslant a\oplus b\Leftrightarrow c\ominus(a\oplus b)=0\Leftrightarrow(c\ominus b)\ominus a=0\Leftrightarrow c\ominus b\leqslant a,$$

即(C4)成立.

3 正则余剩余格及其特征

定义 3 设 $(L,\oplus,\ominus)$ 是余剩余格，定义 $'$：$L\to L$，$a'=1\ominus a$. 若 $\forall a\in L$，$(a')'=a$ 则称 $(L,',\oplus,\ominus)$ 为正则余剩余格. 本文把全体正则余剩余格之类记为 $RCRL$.

定理 4 设 $(L,\oplus,\ominus)\in CRL$ 则 $(L,\oplus,\ominus)\in RCRL$ 的充要条件是 L 上存在一个一元运算 $\neg$ 使得 $\forall a,b\in L$

(RC1) $\neg a\ominus\neg b=b\ominus a$.

证明 必要性：令 $\neg='$，则由(C16)知

$$\neg a\ominus\neg b=(1\ominus a)\ominus(1\ominus b)\leqslant(1\ominus 1)\oplus(b\ominus a)=0\oplus(b\ominus a)=b\ominus a.$$

又因为 $(L,\oplus,\ominus)$ 是正则余剩余格，所以 $b=(b')'=\neg\neg b$，$a=(a')'=\neg\neg a$，这样就有

$$b\ominus a=\neg\neg b\ominus\neg\neg a\leqslant\neg a\ominus\neg b,$$

1) 见 617 页脚注 1)

故 $\neg a\ominus\neg b=b\ominus a$.

充分性：由 $a\leqslant b\Leftrightarrow a\ominus b=0\Leftrightarrow\neg b\ominus\neg a=0\Leftrightarrow\neg b\leqslant\neg a$ 知 $\neg$ 是逆序对应. 由(C8)知 $a\ominus 0=a$，所以 $\neg\neg 1\ominus\neg\neg 0=\neg 0\ominus\neg 1=1\ominus 0=1$. 又 $\neg\neg 1=\neg\neg 1\ominus 0\geqslant\neg\neg 1\ominus\neg\neg 0=1$，所以 $\neg\neg 1=1$. 由 $\neg 0=\neg 0\ominus 0\geqslant\neg 0\ominus\neg 1=1\ominus 0=1$ 得 $\neg 0=1=\neg\neg 1$. 这样由 $\neg\neg 1\geqslant\neg 0$ 得 $\neg 1\leqslant 0$，即 $\neg 1=0$. 再由 $\neg 0=1$ 得 $\neg 1=\neg\neg 0$ 所以 $0=\neg\neg 0$. 于是有

$$\forall a\in L,\neg a=\neg a\ominus 0=\neg a\ominus\neg\neg 0=\neg 0\ominus a=1\ominus a\,.$$

下面只需证 $1\ominus(1\ominus a)=a$. 事实上，由(C11)得

$$\forall t\in L,1\ominus(1\ominus a)\leqslant t\Leftrightarrow 1\ominus t\leqslant 1\ominus a\Leftrightarrow\neg t\leqslant\neg a\Leftrightarrow a\leqslant t\,.$$

因此我们证明了(L，$\neg$，$\oplus$，$\ominus$)是正则余剩余格.

命题 3 设(L,$'$，$\oplus$，$\ominus$)$\in RCRL$，则以下性质成立：

(1) $a\ominus b'=b\ominus a'$，$a'\ominus b=b'\ominus a$；

(2) $a\oplus b=(a'\ominus b)'$，$a\ominus b=(a'\oplus b)'$；

(3) $a'\oplus a=1$；

(4) $(b\ominus a)\ominus a'=0$.

定理 5 (L,$'$，$\oplus$，$\ominus$)$\in RCRL$ 的充要条件是(C4)，(C10)，(C12)，(RC1)成立.

证明 可由定理 4 和定理 1 直接推出.

定理 6 代数系统(L,$'$，$\ominus$)上存在二元运算$\oplus$使(L,$'$，$\oplus$，$\ominus$)$\in RCRL$ 的充要条件是(C10)，(C12)，(RC1)成立.

证明 必要性显然成立. 下证充分性.

$a\leqslant b\Leftrightarrow a\ominus b=0\Leftrightarrow b'\ominus a'=0\Leftrightarrow b'\leqslant a'$ 即$'$是逆序的. 由(C10)，(C12)知

$$a\ominus 0)\ominus a=(a\ominus a)\ominus 0=0\ominus 0=0\text{ 即 }a\ominus 0\leqslant a\,.$$

因为$(a\ominus(a\ominus 0))\ominus 0=(a\ominus 0)\ominus(a\ominus 0)=0$，所以 $a\ominus(a\ominus 0)=0$，即 $a\leqslant a\ominus 0$. 这就有 $a=a\ominus 0$. 再由(C10)，(C12)知$(0'\ominus 1')\ominus 0'=(0'\ominus 0')\ominus 1'=0\ominus 1'=0$. 所以

$$0'\geqslant 0'\ominus 1'=1\ominus 0=1\text{ 即 }0'=1\,.$$

同理，$1''\geqslant 1''\ominus 0''=0'\ominus 1'=1\ominus 0=1$，所以 $1''=1=0'$. 这样由 $1''\geqslant 0'$ 得 $1'\leqslant 0$，即 $1'=0$. 所以 $a'=a'\ominus 0=a'\ominus 1'=1\ominus a$. 于是 $a''=1\ominus(1\ominus a)=0'\ominus a'=a\ominus 0=a$，所以$'$是对合的.

定义$\oplus$：$L\times L\to L$ $a\oplus b=(a'\ominus b)'$

这样

$$\begin{aligned}c\leqslant a\oplus b&\Leftrightarrow c\leqslant(a'\ominus b)'\Leftrightarrow a'\ominus b\leqslant c'\\&\Leftrightarrow(a'\ominus b)\ominus c'=0\Leftrightarrow(a'\ominus c')\ominus b=0\\&\Leftrightarrow(c\ominus a)\ominus b=0\Leftrightarrow(c\ominus b)\ominus a=0\\&\Leftrightarrow c\ominus b\leqslant a\end{aligned}$$

所以(C4)成立. 这样由定理 5 知定理 6 成立.

定理 7 L 是正则余剩余格当且仅当 L 是正则剩余格.

证明 必要性：若(L,$'$，$\oplus$，$\ominus$)是正则余剩余格，则 $a'=1\ominus a$ 且 $a''=a$. 令

$$a\otimes b=(a'\oplus b')'\quad a\to b=(a\ominus b)'$$

容易验证(L，$\otimes$)是以 1 为单位元的交换半群.

$$\begin{aligned}a\otimes b\leqslant c&\Leftrightarrow(a'\oplus b')'\leqslant c&&\Leftrightarrow c'\leqslant a'\oplus b'\\&\Leftrightarrow c'\ominus b'\leqslant a'&&\Leftrightarrow b\ominus c\leqslant a'\\&\Leftrightarrow a\leqslant(b\ominus c)'&&\Leftrightarrow a\leqslant b\to c\end{aligned}$$

所以($\otimes$，$\to$)是伴随对. 又 $\neg a=a\to 0=(a\ominus 0)'=a'$. 由 $a''=a$ 得 $\neg\neg a=a$ 故(L，$\neg$，$\otimes$，$\to$)是正则剩余格.

充分性：同理可得，若 L 是正则剩余格则 L 是正则余剩余格.

4 几类逻辑代数系统的余剩余格表示

定理 7 说明正则余剩余格和正则剩余格是一致的，今后就不再区分 L 是正则余剩余格和 L 是正则剩余格，L 上自然存在$\oplus$，$\ominus$，$\otimes$，$\to$，$'$运算，且满足定理 7 证明中给出的关系. 我们知道，Boole 代数，Heyting 代数，MV-代数，R_0 代数，基础 R_0 代数都是正则剩余格，所以它们都是正则余剩余格. 下面我们基于余剩余格的形式给出 MV-代数，基础 R_0 代数的等价刻画.

定理 8 (L，$\ominus$)是 MV-代数的充要条件是以下性质成立

(1) $a \leqslant b$ 当且仅当 $a \ominus b=0$；

(2) $(a \ominus b) \ominus c=(a \ominus c) \ominus b$；

(3) $(1 \ominus a) \ominus (1 \ominus b)=b \ominus a$；

(4) $a \wedge b=a \ominus (a \ominus b)$.

证明 由定理7知必要性成立. 由定理6知，性质(1)—(3)说明(L，$'$，$\ominus$)是正则余剩余格，这里 $a'=1\ominus a$，$a \in L$. 由文献［13］知满足条件 $a \vee b=(a \to b) \to b$ 的正则剩余格就是MV-代数. 由定理7的证明易知性质(4)等价于该条件，所以(L，$\ominus$)是MV-代数.

定理9 (L，$\ominus$，$'$)是基础 R_0-代数的充要条件是以下性质成立

(1) $a \leqslant b$ 当且仅当 $a \ominus b=0$；

(2) $(a \ominus b) \ominus c=(a \ominus c) \ominus b$；

(3) $a' \ominus b'=b \ominus a$；

(4) $a \ominus (b \vee c)=(a \ominus b) \wedge (a \ominus c)$.

证明 由定理7知必要性成立. 由文献[7]知满足条件 $a \to (b \vee c)=(a \to b) \vee (a \to c)$ 的正则剩余格就是基础 R_0-代数，由定理6和定理7易知性质(1)—(4)等价于上述条件，所以(L，$\ominus$，$'$)是基础 R_0-代数.

事实上，我们如果在定理9的4条性质的基础上增添一个条件 $(a \ominus b) \wedge ((a \wedge b') \ominus (a \ominus b))=0$，那么($L$，$\ominus$，$'$)就是 R_0-代数.

5 结束语

余剩余格理论为我们研究逻辑代数系统提供了另一工具，本文对余剩余格和正则余剩余格的概念和性质进行研究，得到了余剩余格和正则余剩余格的几个特征定理，并且论证了正则余剩余格与正则剩余格的等价性，这将有助于我们深入了解余剩余格的代数结构和众多逻辑代数系统的结构. 有关余剩余格和正则余剩余格公理系统的独立性以及它们的构造，我们将另文讨论.

同时，余伴随对($\oplus$，$\ominus$)又是($+$，$-$)在格 L 上的推广，(L，$\oplus$，$\ominus$)的性质是具有普遍性和代表性的，从这一点来看，今后的研究仍然是令人期待和富有挑战性的. 如何在(L，$\oplus$，$\ominus$)上引入度量甚至建立拓扑结构就是值得我们进一步探讨和研究的课题.

参考文献

1 Chang C C. Algebraic analysis of many-valued logic. Trans Amer Math Soc, 1958, 88: 467—490

2 Hajek P. Metamathematics of Fuzzy Logic. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998

3 Pavelka J. On Fuzzy Logic (I)(II)(III). Z Math Logic u Grundlagen d Math, 1979, 25: 45—52, 119—134, 447—460

4 Turunen E. Mathematics Behind Fuzzy Logic. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999

5 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理. 北京：科学出版社，2000

6 Cignoli R, Dottaviano IML, Mundici D. Algebraic Foundations of Mang-Valued Reasoning. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000

7 吴洪博. 基础 R_0-代数与基础 L^* 系统. 数学进展，2003，32(5)：565—576

8 吴望名. Fuzzy蕴涵代数. 模糊系统与数学，1990，4(1)：56—64

9 徐 扬. 格蕴涵代数. 西南交通大学学报，1993，28(1)：20—26

10 王国俊. 蕴涵格及其Fuzzy拓扑表现定理. 数学学报，1999，42(1)：133—140

11 裴道武，王国俊. 一种新的模糊代数系统. 西南交通大学学报，2000，35(5)：564—568

12 裴道武. 剩余格与正则剩余格的特征定理. 数学学报，2002，45(2)：271—278

13 王国俊. MV-代数，BL-代数，R_0-代数与多值逻辑. 模糊系统与数学，2002，16(2)：1—15